Elektrotechnik (Teil 2/3)

Luft- und Raumfahrttechnik Bachelor, 1. Semester

David Straub

Gliederung des Kurses

1. Einführung (Physikalische Größen, Einheiten)
2. Das elektrische Feld (Ladungen, Kräfte, Felder, Potential, Spannung, Kapazität, Kondensatoren)
3. Gleichstrom (Stromstärke, Widerstand, Stromkreisberechnungen, Energie, Leistung)
4. Magnetismus (Feld in Vakuum und Materie, Kräfte, magnetischer Kreis)
5. Elektromagnetische Induktion (Induktion, Selbstinduktion, Energie)
6. Wechselstrom (Komplexe Wechselstromrechnung, Schaltungen, Leistung)
7. Drehstrom (Dreiphasensystem)
8. Schaltvorgänge an Kapazitäten und Induktivitäten

Magnetismus

1. Magnetisches Feld
2. Magnetisches Feld in Materie
3. Kräfte im magnetischen Feld
4. Magnetischer Kreis

Elektrizität & Magnetismus

… sind untrennbar verbunden. Eine Konsistente Naturbeschreibung erfordert beide

Grenzfälle:

- Ruhende Ladungen → **Elektrostatik**
- Konstante Stromverteilungen → **Magnetostatik**
- Langsam bewegte Ladungen & langsam veränderliche Ströme → **Quasistatik**
- Allgemeiner Fall → **Elektrodynamik**

Magnetpole

- Magnete besitzen immer zwei Pole: Nordpol (N) und Südpol (S)
  - Nordpol = Pol, der auf der Erde nach Norden zeigt
- Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige Pole ziehen sich an

Image Missing

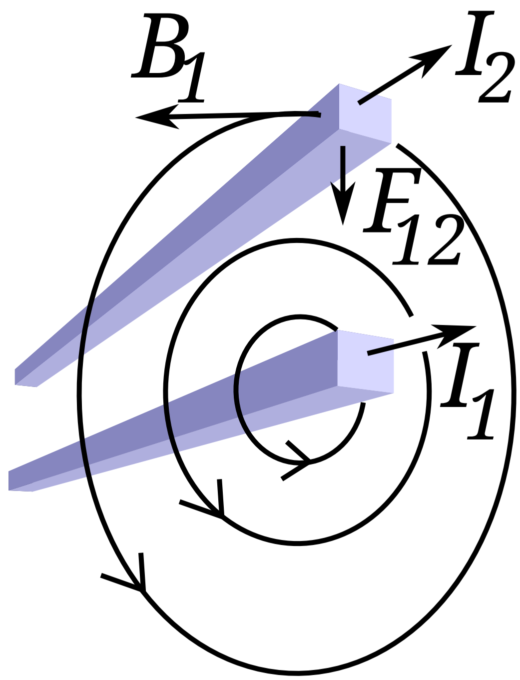
Kräfte zwischen elektrischen Leitern

Zwei parallele, stromdurchflossene Leiter üben eine Kraft aufeinander aus

$$\frac{|\vec{F}_{12}|}{l} = 2k_A \cdot \frac{I_1 I_2}{d}$$

Magnetfelder entstehen durch bewegte elektrische Ladungen (Ströme)

Im SI-System gilt $k_A = \frac{\mu_0}{4\pi}$ mit $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$



Wichtiger Unterschied zur Elektrostatik

- In der Elektrostatik haben wir die Feldstärke über die Kraft definiert: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$
- In der Magnetostatik geht das nicht so einfach, da die Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung der Ladung wirkt
- Wir können experimentell die Feldlinien durch die Ausrichtung eines Permanentmagneten (Kompassnadeln) sichtbar machen

Magnetische Feldlinien

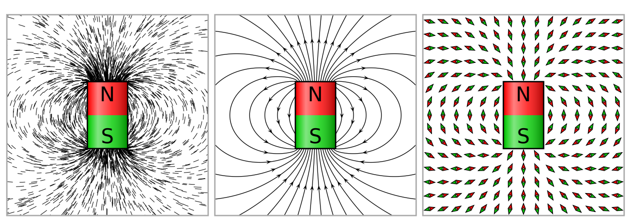


Figure 1: width:20cm

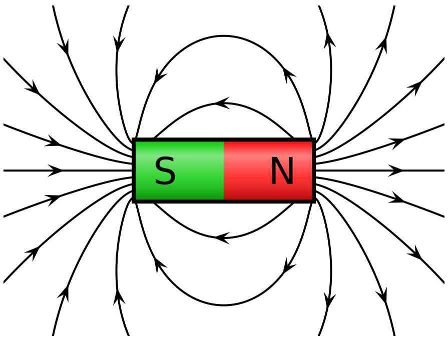
- Magnetische Feldlinien zeigen in die Richtung, in die sich der Nordpol eines kleinen Testmagneten ausrichten würde: N $\rightarrow$ S außerhalb des Magneten
- Magnetische Feldlinien sind immer geschlossen (keine magnetischen Monopole) oder

unendlich lang

- Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß für die Stärke des Magnetfeldes

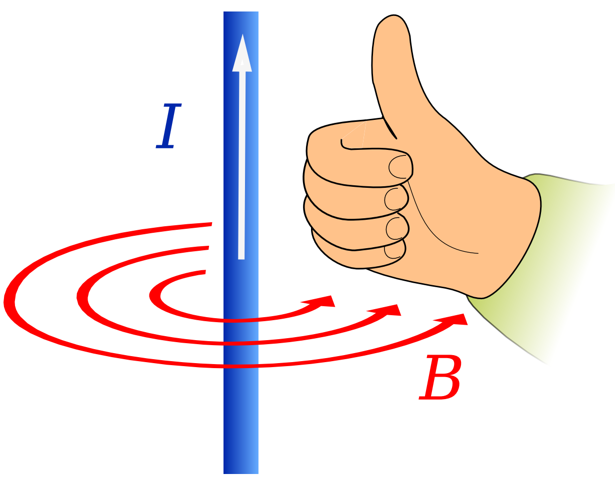
Magnetische Flussdichte $\vec{B}$

Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ zeigt entlang der magnetischen Feldlinien. Ihr Betrag ist proportional zur Dichte der Feldlinien.



Rechte-Faust-Regel

- Ein gerader, stromdurchflossener Leiter erzeugt ein ringförmiges Magnetfeld. Wenn der Daumen der Faust in Stromrichtung zeigt, zeigen die gekrümmten Finger in Feldrichtung
- Alternativ: eindrehen einer Schraube in Stromrichtung → Drehrichtung der Schraube entspricht der Feldlinienrichtung



Magnetische Flussdichte eines stromdurchflossenen Leiters

Im Abstand r von einem geraden, unendlich langen Leiter:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

Einheit: das Tesla

$$[\vec{B}] = [\mu_0] \cdot \frac{[I]}{[r]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \mathrm{T}$$

Einheit Tesla: numerisches Beispiel

Historische Definition des Amperes: Zwei parallele, unendlich lange Leiter im Abstand von 1 m, durch die jeweils 1 A fließen, üben eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ aufeinander aus $\rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$

Wieviel Ampere müssen durch einen Leiter fließen, um ein Magnetfeld von 1 T in 1 m Abstand zu erzeugen?

Größenordnung der Magnetischen Flussdichte

Magnet	Magnetische Flussdichte B
Erdmagnetfeld	30 µT – 60 µT
Kühlschrankmagnet	1 mT – 10 mT
Magnetstreifen (Kreditkarte)	10 mT – 100 mT
Lautsprechermagnet	100 mT – 1 T
MRT-Gerät	1 T – 3 T
Large Hadron Collider (LHC)	8 T
Fusionskraftwerk	5–15 T

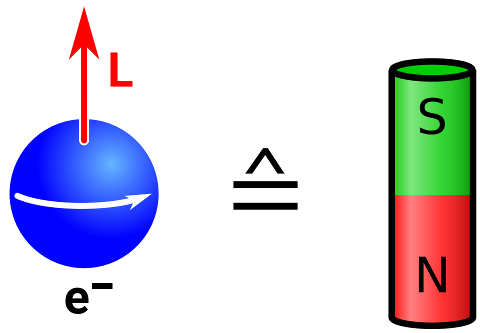
Permanenter Magnetismus: Ursprung im Elektronenspin

Elektronenspin (intrinsische Eigenschaft):

- Das Elektron besitzt einen **Spin** – eine quantenmechanische Eigenschaft ähnlich einem Drehimpuls
- Man kann sich (vereinfacht) vorstellen: Elektron verhält sich *als ob* es um die eigene Achse rotiert

Konsequenz:

- Jedes Elektron ist ein winziger **Permanentmagnet**
- Makroskopische Magnete entstehen durch **Ausrichtung** vieler Elektronenspins



Kräfte im magnetischen Feld

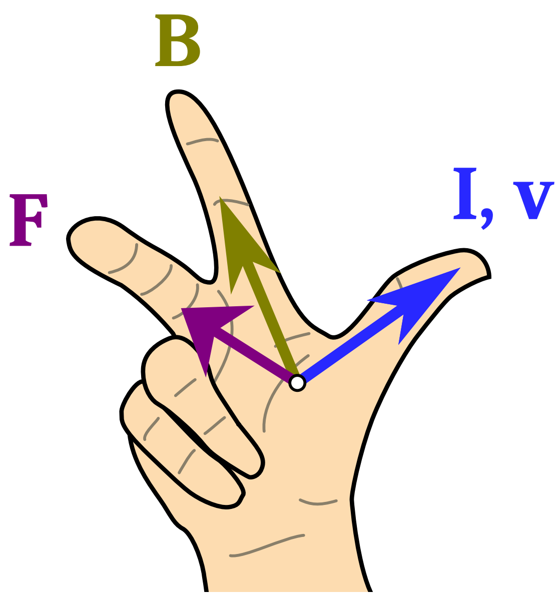
Lorentzkraft auf bewegte Ladung:

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Kraft auf stromdurchflossenen Leiter:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{\ell} \times \vec{B})$$

- Skalar (wenn $\vec{\ell} \perp \vec{B}$): $F = I \cdot \ell \cdot B$
- **Rechte-Hand-Regel:** Daumen = Stromrichtung, Zeigefinger = Feldrichtung, Mittelfinger = Kraftrichtung



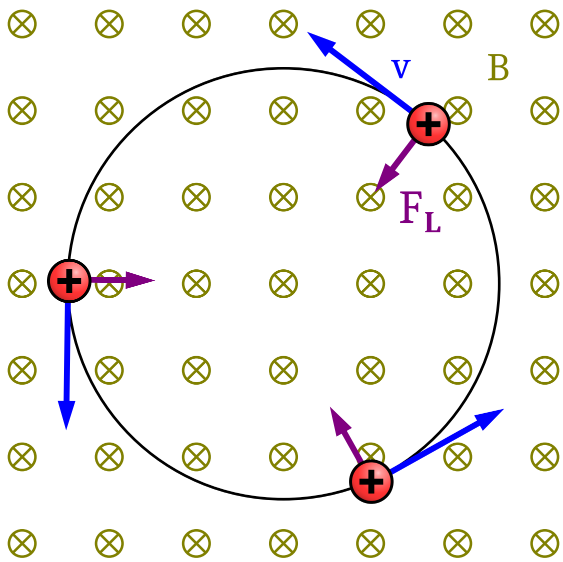
Bewegte Ladung im Magnetfeld

Kreisbewegung:

- Lorentzkraft wirkt als Zentripetalkraft: $Q \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r}$
- Bahnradius: $r = \frac{m \cdot v}{Q \cdot B}$
- Umlauffrequenz: $f = \frac{Q \cdot B}{2\pi m}$ (unabhängig von v!)

Anwendungen:

- Teilchenbeschleuniger (Zyklotron)
- Massenspektrometer



Vergleich: Elektrisches und Magnetisches Feld

Eigenschaft	Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Feldlinien	Beginnen/enden auf Ladungen	Enden nie
Quellen	Ladungen	Keine (keine Monopole)
Wirbel	Keine (wirbelfrei)	Ströme erzeugen Wirbel
Potential	Darstellbar als Gradient	Nicht darstellbar
Arbeit	Wegunabhängig	keine (Magnetostatik)

Elektrostatisches Feld = Quellenfeld, wirbelfrei **Magnetostatisches Feld** = Quellenfrei, Wirbelfeld

Magnetischer Fluss Φ

Der magnetische Fluss Φ durch eine Fläche A ist definiert als:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

- Einheit: $[\Phi] = \mathrm{Vs}$ (Weber)

Da das magnetische Feld *quellenfrei* ist, gilt für jede geschlossene Fläche:

$$\Phi_{\text{geschl. Fl.}} = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

(Vergleiche: Satz von Gauß, $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{innen}}$)

Magnetische Feldstärke $\vec{H}$

Die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ beschreibt die Fähigkeit eines elektrischen Stroms, ein Magnetfeld zu erzeugen.

Zusammenhang mit der magnetischen Flussdichte (im Vakuum):

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

- Einheit: $[H] = \frac{[B]}{[\mu_0]} = \frac{\mathrm{T}}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}} = \frac{\frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{A\cdot m}}}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$

Beispiel:

- Gerader stromdurchflossener Leiter (Abstand r): $H = \frac{I}{2\pi r}$

Durchflutungsgesetz (Ampèresches Gesetz)

Die Summe der magnetischen Feldstärke längs eines geschlossenen Weges ist gleich der Gesamtstromdurchflutung:

$$\Theta = N \cdot I = \oint \vec{H}(s) \cdot d\vec{s}$$

Erinnerung: in der Elektrostatik gilt aufgrund der Wegunabhängigkeit des Potentials:

$$U = \int \vec{E}(s) \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{E}(s) \cdot d\vec{s} = 0$$

Vergleich: Gaußsches Gesetz und Ampèresches Gesetz

Berechnung von Feldern mit hoher Symmetrie:

Elektrostatik	Magnetostatik
Gaußsches Gesetz	**Ampèresches Gesetz**
$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{innen}}$	$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{\text{umschlossen}}$
Quellenfeld	Wirbelfeld
Quellenfreiheit:	**Wirbelfreiheit:**
$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
(Elektrostatische Felder sind wirbelfrei)	(Magnetische Felder sind quellenfrei)

Anwendung bei Symmetrie:

- Gaußsches Gesetz → Kugel-, Zylinder-, Plattensymmetrie für Ladungen
- Ampèresches Gesetz → Zylinder-, Ebenen-, Toroidsymmetrie für Ströme

Magnetfeld einer langen Spule

Aufbau: Lange Spule mit N Windungen, Länge ℓ, Strom I

Durchflutungsgesetz:

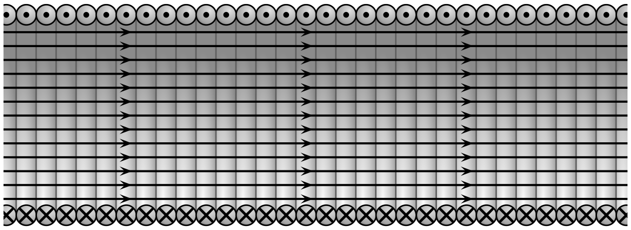
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = N \cdot I$$

Im Inneren der Spule:

$$H = \frac{N \cdot I}{\ell} = n \cdot I \quad \text{mit } n = \frac{N}{\ell}$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r n I$$

Außerhalb: $B \approx 0$



Beispiel: Magnetfeld in einem Tokamak

Image Missing

Beispiel: Magnetfeld in einem Tokamak

Ringförmiges Fusionsreaktor-Design mit toroidalem Magnetfeld zum Plasmaeinschluss

Toroidale Feldspulen (TF):

- N Spulen gleichmäßig um den Torus verteilt, M Windungen, Strom I pro Windung
- Ampèresches Gesetz auf kreisförmigem Weg (Radius r):

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot 2\pi r = NM \cdot I \Rightarrow H(r) = \frac{NMI}{2\pi r}$$

Eigenschaften:

- Feld nimmt mit $\frac{1}{r}$ ab (inhomogen)
- Typische Werte: $B \approx 5\text{—}15\,\mathrm{T}$

Beispiel ITER: 18 TF-Spulen, 134 Windungen 68 kA, B = 5,3 T bei 6,2 m Radius

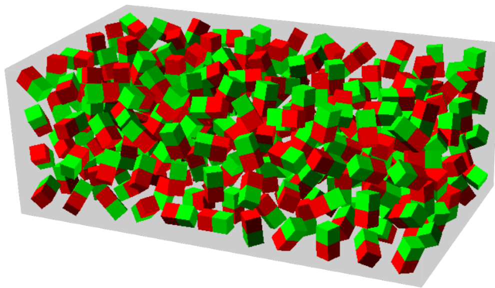
Magnetisches Verhalten von Materie

Ähnlich wie bei Dielektrika im elektrischen Feld reagiert Materie im Magnetfeld durch **Magnetisierung**.

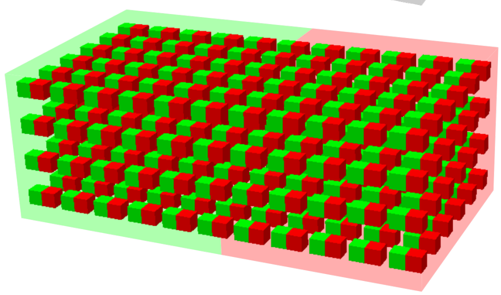
Magnetische Dipole in Atomen:

- Elektronen haben einen intrinsischen **Spin** (magnetischer Dipol)
- Bahnbewegung der Elektronen erzeugt **Bahnmagnetismus**
- Atomrümpfe können ebenfalls magnetische Momente besitzen

(a)



(b)



Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität

Die Magnetisierung $\vec{M}$ ist proportional zur magnetischen Feldstärke $\vec{H}$:

Magnetische Suszeptibilität χ_m:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \text{bzw.} \quad \mu_r = 1 + \chi_m$$

Reaktion auf äußeres Feld:

- Diamagnetismus: Dipole richten sich **gegen** das äußere Feld ($\mu_r < 1$, $\chi_m < 0$)
- Paramagnetismus: Dipole richten sich **mit** dem äußeren Feld ($\mu_r > 1$, $\chi_m > 0$)
- Ferromagnetismus: Starke Ausrichtung der Dipole ($\mu_r \gg 1$, $\chi_m \gg 1$)

Magnetische Eigenschaften der Elemente

(S. Zurek, Encyclopedia Magnetica, CC-BY-4.0)

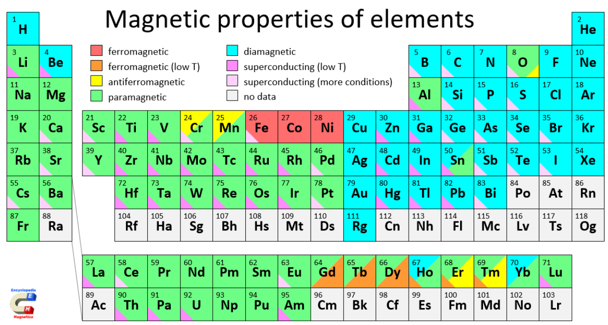


Figure 2: width:23cm

Diamagnetismus

Eigenschaften:

- Tritt in allen Materialien auf
- Magnetische Suszeptibilität: $\chi_m < 0$ (sehr klein)
- Relative Permeabilität: $\mu_r < 1$ (knapp unter 1)

Physikalischer Mechanismus:

- Externes Magnetfeld induziert Änderung der Elektronenbahnen
- Erzeugt magnetisches Moment **entgegen** dem äußeren Feld
- Effekt verschwindet, wenn Feld abgeschaltet wird

Beispiele: Kupfer, Silber, Gold, Wasser, organische Materialien

Levitation

Diamagnetische Materialien können in starken Magnetfeldern schweben

Paramagnetismus

Eigenschaften:

- Atome besitzen permanente magnetische Dipole
- Magnetische Suszeptibilität: $\chi_m > 0$ (klein)
- Relative Permeabilität: $\mu_r > 1$ (knapp über 1)
- Paramagnete werden **schwach von Magneten angezogen**

Physikalischer Mechanismus:

- Ohne externes Feld: zufällige Ausrichtung der Dipole (thermische Bewegung)
- Mit externem Feld: partielle Ausrichtung **parallel** zum Feld
- Stärker bei tiefen Temperaturen (Curie-Gesetz: $\chi_m \propto 1/T$)

Beispiele: Aluminium, Platin, Sauerstoff

Ferromagnetismus

Eigenschaften:

- Sehr starke Magnetisierung
- Magnetische Suszeptibilität: $\chi_m \gg 1$
- Relative Permeabilität: $\mu_r \gg 1$ (bis zu 10^5), viel größer als bei Paramagneten!
- **Spontane Magnetisierung** auch ohne externes Feld möglich

Physikalischer Mechanismus:

- Starke Wechselwirkung zwischen benachbarten Atomen (**Austauschwechselwirkung**)
- Bildung von **Weiss'schen Bezirken** (Domänen)
- Externes Feld richtet Domänen aus

Beispiele: Eisen, Kobalt, Nickel

Weiß'sche Bezirke

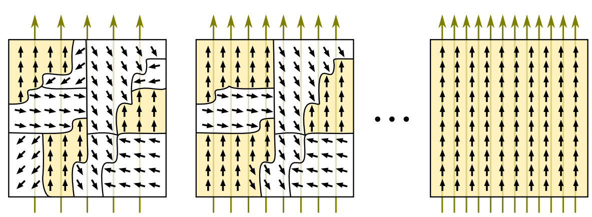
- Bereiche mit **gleich orientierten magnetischen Dipolen**
- Spontane Magnetisierung innerhalb der Bezirke

Ohne äußeres Feld:

- Bezirke sind zufällig orientiert → keine Gesamtmagnetisierung

Mit äußerem Feld:

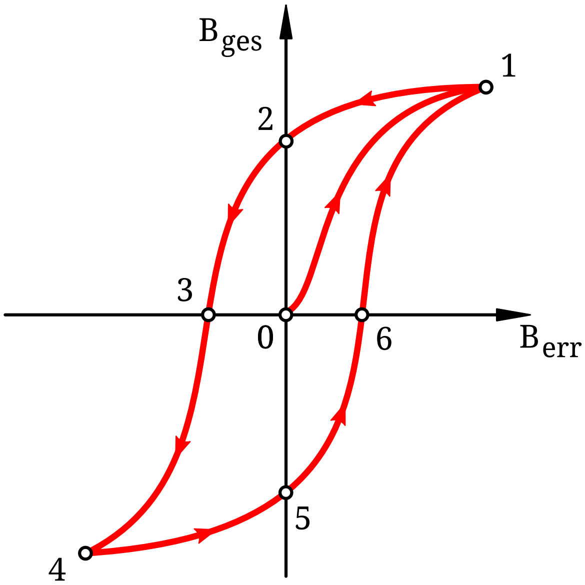
- Bezirke richten sich aus
- Bei Sättigung: einheitliche Ausrichtung



Ferromagnetismus: Hysterese

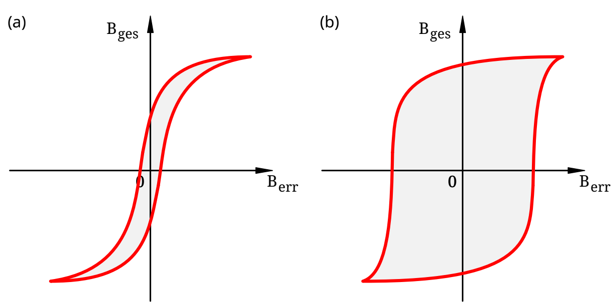
Kenngrößen:

- **Sättigungsmagnetisierung** (1): maximale Magnetisierung
- **Remanenz** (2): verbleibende Flussdichte bei verschwindendem äußeren Feld
- **Koerzitivfeldstärke** (3): Feldstärke zum Entmagnetisieren



Harte/weiche Magnete

- **Weiche Magnetmaterialien:**
  - Leicht magnetisier- und entmagnetisierbar
  - Anwendung: Transformatoren, Elektromagnete
- **Harte Magnetmaterialien:**
  - Behalten Magnetisierung
  - Anwendung: Permanentmagnete, Motoren, Lautsprecher



Magnetisches Feld und Magnetisierung

Magnetisierung $\vec{M}$: magnetisches Dipolmoment pro Volumeneinheit

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Zusammenhang der Feldgrößen:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

Konvention: Die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ beschreibt das durch freie Ströme erzeugte Magnetfeld – ohne Beiträge der Magnetisierung des Materials.

Vorteil: Das Durchflutungsgesetz gilt unverändert für freie Ströme:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{\text{frei}}$$

Analogie Elektrostatik <→ Magnetostatik

Elektrostatik:

- Elektrische Flussdichte: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (bezieht sich auf freie Ladungen)
- Vorteil: Das Gaußsche Gesetz gilt unverändert für freie Ladungen:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{frei}}$$

Magnetostatik:

- Magnetische Feldstärke: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ (bezieht sich auf freie Ströme)
- Vorteil: Das Durchflutungsgesetz gilt unverändert für freie Ströme:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{\text{frei}}$$

Analogie der Feldgrößen

Übersicht: Größen in der Magnetostatik

Größe	Definition	Einheit
Magnetische Flussdichte (*magnetic flux density*)	$\vec{B}$	$[\vec{B}] = \mathrm{T} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A \cdot m}}$

Größe	Definition	Einheit
Magnetische Feldstärke (*magnetic field [strength]*)	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r}$	$[\vec{H}] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$
Magnetischer Fluss (*magnetic flux*)	$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$	$[\Phi] = \mathrm{Vs} = \mathrm{Wb}$
Durchflutung (*magnetomotive force*)	$\Theta = N \cdot I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$	$[\Theta] = \mathrm{A}$
Magnetische Feldkonstante (*magnetic constant*) = ~~Permeabilität des Vakuums (*vacuum permeability*)~~	μ_0	$[\mu_0] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$
[Absolute] Permeabilität (*[absolute] permeability*)	μ	$[\mu] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$
Relative Permeabilität (*relative permeability*)	$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$	dimensionslos

Der magnetische Kreis

Definition: geschlossener Pfad aus ferromagnetischem Material, durch den magnetischer Fluss geführt wird

Relevant in vielen Anwendungen:

- Elektromotoren (E-Autos, Industrie)
- Transformatoren (Energieversorgung)
- Induktives Laden (Smartphones, E-Autos)
- Sensoren und Aktuatoren
- Generatoren (Windkraftanlagen)

Problem: Wie dimensioniert man diese Systeme effizient?

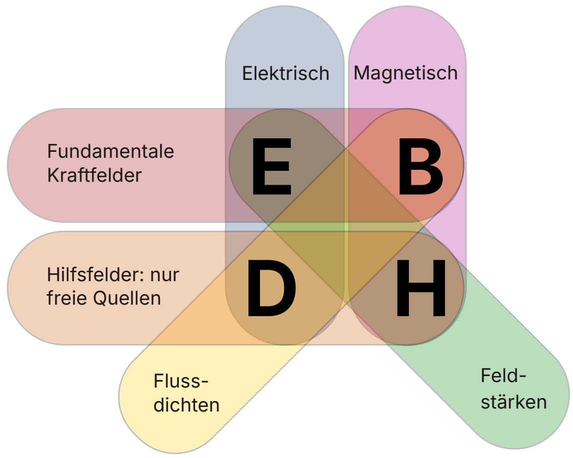
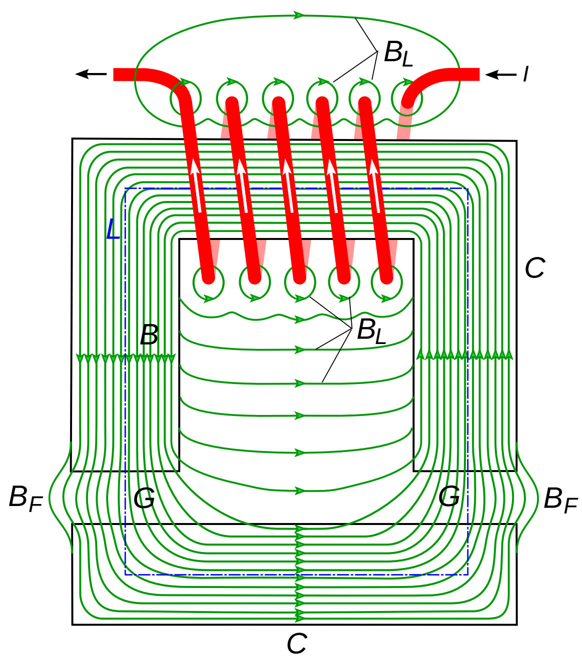


Figure 3: width:18cm



Herausforderung: Komplexe Magnetfelder

Direkter Ansatz wäre kompliziert:

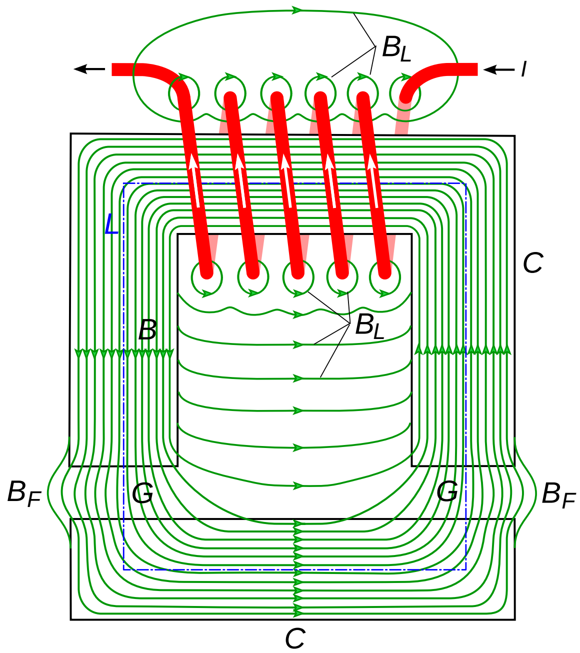
- Berechnung von $\vec{B}$-Feldern in 3D
- Numerische Simulation (FEM) zeitaufwendig

Eindimensionale Lösung: Der magnetische Kreis

Eine *mathematische Analogie* zum elektrischen Stromkreis:

- Einfache Berechnungen wie bei Widerstandsnetzwerken
- Gute Näherung für viele praktische Fälle

Voraussetzung: Magnetischer Fluss „fließt“ hauptsächlich durch ferromagnetisches Material



Grundidee

Elektrischer Kreis:

- Spannung treibt Strom durch Widerstand
- Strom „fließt“ durch Leiter
- $U = R \cdot I$ (Ohmsches Gesetz)

Magnetischer Kreis:

- Durchflutung treibt magnetischen Fluss durch magnetischen Widerstand
- Magnetischer Fluss „fließt“ durch ferromagnetisches Material
- $\Theta = R_m \cdot \Phi$ (analoges „Ohmsches Gesetz“)

Wichtig: Diese Analogie ist *mathematisch*, nicht physikalisch! - Kein echter „Fluss“ von etwas - Aber sehr nützlich für Berechnungen

Das Durchflutungsgesetz: Unser Ausgangspunkt

Erinnerung: Durchflutungsgesetz (Ampèresches Gesetz) entlang eines geschlossenen Weges:

$$\Theta = N \cdot I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

- Θ: magnetische **Durchflutung**
- $N \cdot I$: Windungszahl mal Strom in der Spule
- $\vec{H}$: magnetische Feldstärke

Interpretation:

- Die Durchflutung Θ ist wie eine „treibende Kraft“ für das Magnetfeld
- Entspricht der Spannung im elektrischen Kreis: $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ (wichtiger Unterschied: $\int \vec{H} \cdot d\vec{s}$ ist nicht wegunabhängig!)

Vereinfachung für homogene Kreise

Annahme: Homogener magnetischer Kreis

- Konstante Querschnittsfläche A
- Ein Material mit konstanter Permeabilität μ_r
- Magnetfeld folgt dem Materialweg

Dann wird das Linienintegral einfach:

$$\Theta = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot \ell$$

- H: konstante magnetische Feldstärke im Material
- ℓ: mittlere Weglänge des magnetischen Pfades

Nächster Schritt: Was hat das mit dem magnetischen Fluss zu tun?

Der magnetische Fluss Φ

Definition: Integral der magnetischen Flussdichte über eine Fläche

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Für homogene Felder und Querschnitte:

$$\Phi = B \cdot A$$

Einheit: Weber (Wb = Vs)

Physikalische Bedeutung:

- Maß für die Gesamtzahl der magnetischen Feldlinien durch eine Fläche

Verbindung

Materialgleichung: Zusammenhang zwischen B und H

$$B = \mu_0 \mu_r H$$

- $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H/m}$
- μ_r: relative Permeabilität (Eisen: $\mu_r \approx 1000$–10000)

Einsetzen in den magnetischen Fluss:

$$\Phi = B \cdot A = \mu_0 \mu_r H \cdot A$$

Umstellen nach H:

$$H = \frac{\Phi}{\mu_0 \mu_r A}$$

Herleitung des magnetischen Widerstands

Kombinieren wir unsere Gleichungen:

$$\Theta = H \cdot \ell = \frac{\Phi}{\mu_0 \mu_r A} \cdot \ell = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r A} \cdot \Phi$$

Umschreiben in der Form $\Theta = R_m \cdot \Phi$:

$$\boxed{\Theta = R_m \cdot \Phi}$$

mit dem **magnetischen Widerstand**:

$$\boxed{R_m = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r A}}$$

Das ist das **„Ohmsche Gesetz“ des magnetischen Kreises**!

Der magnetische Widerstand: Interpretation

$$R_m = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r A}$$

Einheit: $[R_m] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Wb}}$ (Ampere pro Weber)

Der magnetische Widerstand wird größer, wenn:

- Der Weg ℓ länger wird (mehr „Strecke“ für den Fluss)
- Die Querschnittsfläche A kleiner wird (weniger „Platz“)
- Die Permeabilität μ_r kleiner wird (Material „leitet“ schlechter)

Analog zum elektrischen Widerstand: $R = \frac{\ell}{\sigma A}$

Magnetischer Leitwert (Permeanz)

Alternative Beschreibung: Analog zum elektrischen Leitwert $G = \frac{1}{R}$

$$\Lambda = \frac{1}{R_m} = \frac{\mu_0 \mu_r A}{\ell}$$

Einheit: $[\Lambda] = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \mathrm{H}$ (Henry)

Alternative Formulierung des “Ohmschen Gesetzes”:

$$\Phi = \Lambda \cdot \Theta$$

Interpretation:

- Der Leitwert gibt an, wie *leicht* magnetischer Fluss durch ein Material fließt
- Große Permeabilität μ_r → großer Leitwert → viel Fluss

Zusammenfassung: Die Analogie

Elektrischer Kreis	Magnetischer Kreis
Spannung $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$	Durchflutung $\Theta = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$
Stromstärke $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$	Magnetischer Fluss $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$
Widerstand $R = \frac{\ell}{\sigma A}$	Mag. Widerstand $R_m = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r A}$
Leitwert $G = \frac{1}{R}$	Mag. Leitwert $\Lambda = \frac{1}{R_m}$
$U = R \cdot I$	$\Theta = R_m \cdot \Phi$

Wichtig: Rein mathematische Analogie, aber sehr nützlich für Berechnungen!

Komplexere Kreise: Reihenschaltung

Reale Situation: Verschiedene Materialien im magnetischen Pfad

- Eisenkern verschiedener Querschnitte
- Luftspalte
- Verschiedene Materialien (Eisen, Ferrit, …)

Verhalten wie elektrische Widerstände in Reihe:

$$R_{m,\text{ges}} = R_{m,1} + R_{m,2} + \dots + R_{m,n}$$

Durchflutungsgesetz:

$$\Theta = \Phi \cdot R_{m,\text{ges}}$$

Wichtig: Der gleiche magnetische Fluss Φ durchfließt alle Abschnitte! (Wie Strom in elektrischer Reihenschaltung)

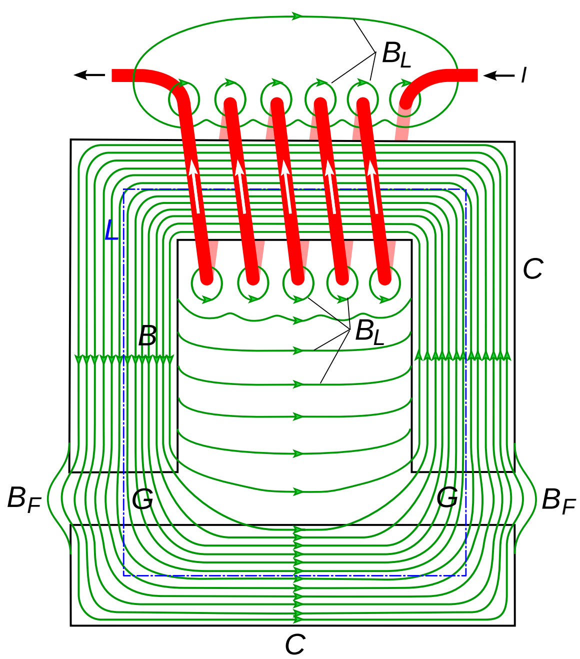
Praxisbeispiel: Elektromagnet mit Luftspalt

Typische Anwendung: Schaltschütz, Relais, Hubmagnet

Aufbau:

- Eisenkern mit Spule (N Windungen, Strom I)
- Einstellbarer Luftspalt der Länge δ
- Eisenweg: Länge ℓ_E, Querschnitt A
- Luftspalt: Länge δ, gleicher Querschnitt A

Frage: Wie groß ist der magnetische Fluss Φ?



Berechnung: Luftspalt und Eisenkern

Eisenkern:

$$R_{m,E} = \frac{\ell_E}{\mu_0 \mu_r A}$$

Luftspalt: ($\mu_r = 1$ für Luft)

$$R_{m,L} = \frac{\delta}{\mu_0 A}$$

Gesamtwiderstand:

$$R_{m,\text{ges}} = R_{m,E} + R_{m,L} = \frac{\ell_E}{\mu_0 \mu_r A} + \frac{\delta}{\mu_0 A}$$

Magnetischer Fluss:

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_{m,\text{ges}}} = \frac{N \cdot I}{\frac{\ell_E}{\mu_0 \mu_r A} + \frac{\delta}{\mu_0 A}}$$

Die überraschende Dominanz des Luftspalts

Zahlenwerte (typisch):

- Eisenweg: $\ell_E = 30$ cm, $\mu_r = 2000$
- Luftspalt: $\delta = 1$ mm

Vergleich der Widerstände:

$$\frac{R_{m,L}}{R_{m,E}} = \frac{\delta/(\mu_0 A)}{\ell_E/(\mu_0 \mu_r A)} = \frac{\delta \cdot \mu_r}{\ell_E} = \frac{0.001 \cdot 2000}{0.3} \approx 6.7$$

Der Luftspalt ist 7× wichtiger, obwohl er 300× kürzer ist!

Grund: Die sehr hohe Permeabilität von Eisen

Praktische Näherung für kleine Luftspalte

Wenn $\mu_r \gg 1$ und $\delta \cdot \mu_r \gg \ell_E$, dann:

$$R_{m,L} \gg R_{m,E}$$

Näherung: Eisenwiderstand vernachlässigbar

$$\Phi \approx \frac{N \cdot I}{R_{m,L}} = \frac{N \cdot I \cdot \mu_0 \cdot A}{\delta}$$

Der Luftspalt bestimmt die magnetischen Eigenschaften!

Elektromagnetische Induktion

1. Induktionsgesetz
2. Selbstinduktion
3. Energie des magnetischen Feldes
4. Kräfte an Grenzflächen

Elektromagnetische Induktion: Grundprinzipien

- Bisher: el. Feld ruhender Ladungen (Elektrostatik) und mag. Feld konstanter Ströme (Magnetostatik)
- Sobald zeitliche Änderungen auftreten → Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern

Induktion: ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt („induziert“) ein elektrisches Feld

Induktion: technische Anwendungen

- Generatoren (Energieerzeugung)
- Transformatoren (Spannungswandlung)
- Elektromotoren (Antriebssysteme)
- Rekuperation bei Elektrofahrzeugen
- Induktive Ladesysteme (Smartphones, E-Autos)
- Sensoren (z.B. induktive Näherungsschalter)
- Induktionsherd
- Wirbelstrombremsen (Eisenbahn)
- …

Bewegung eines Leiterstücks im Magnetfeld

Lorentzkraft: $\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$

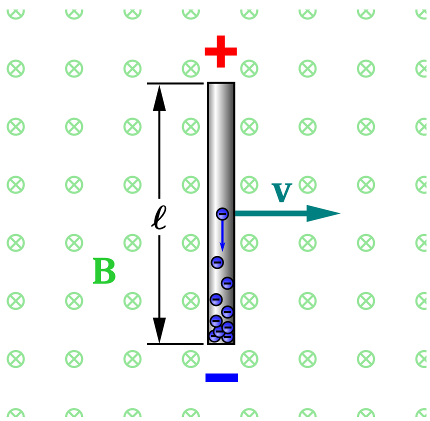
Kraft durch elektrische Feldstärke: $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$

Kräftegleichgewicht: $\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0 \Longrightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$

Spannung an den Leiterenden: Mit $U = \vec{E} \cdot \vec{\ell}$ folgt:

$$U_{\text{ind}} = -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell}$$

Induzierte Spannung durch Bewegung im Magnetfeld



Das Induktionsgesetz in allgemeiner Form

Bewegtes Leiterstück: $\vec{v}$, $\vec{B}$ und $\vec{\ell}$ jeweils senkrecht zueinander:

$$U_{\text{ind}} = -\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{\ell} = -B \cdot \ell \cdot v = -B \cdot \ell \cdot \frac{ds}{dt} = -B \cdot \frac{dA}{dt}$$

Allgemein gilt:

$$U = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Zwei Möglichkeiten der Induktion

1. **Bewegungsinduktion:** Leiter und Magnetfeld bewegen sich relativ zueinander
2. **Ruheinduktion:** Magnetischer Fluss ändert sich bei ruhendem Leiter:

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(A \cdot B)}{dt} = -\frac{dB}{dt} \cdot A - \frac{dA}{dt} \cdot B$$

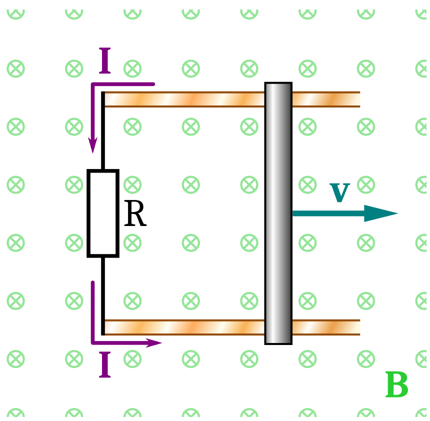
Übergang auf N Windungen:

$$U = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \tag{4.15}$$

Induzierter Strom

Verbindet man die Enden des Leiterstücks über einen Widerstand R (der sich nicht mitbewegt), so fließt ein **induzierter Strom**:

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$



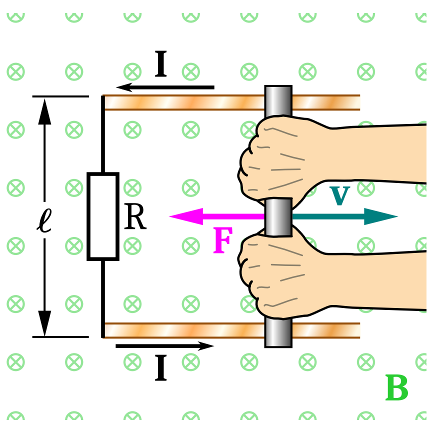
Die Lenz'sche Regel

Polarität der induzierten Spannung:

Die induzierte Spannung ist stets so gerichtet, dass ein durch sie hervorgerufener Strom der Ursache ihrer Entstehung entgegenwirkt.

Für $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ wirkt der induzierte Strom der Flussänderung entgegen

Erklärung: die Energie, die am Widerstand in Wärme umgesetzt wird, stammt aus der mechanischen Arbeit, die aufgewendet werden muss, um die Flussänderung zu erzeugen – die Lenz'sche Regel ist Ausdruck der **Energieerhaltung**.



Das induzierte elektrische Wirbelfeld

Wichtige Erkenntnis: Bei Induktion ist die Spannung U_{ind} **keine Potentialdifferenz**!

Grund:

- Das zeitlich veränderliche Magnetfeld erzeugt ein elektrisches **Wirbelfeld**

- Dieses Wirbelfeld ist **nicht konservativ** (im Gegensatz zum elektrostatischen Feld)
- Es existiert kein Potential φ mit $U = \varphi_1 - \varphi_2$

Die induzierte „Spannung“ ist vielmehr:

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{s}$$

Ein Umlaufintegral entlang der Leiterschleife – das Integral über einen geschlossenen Weg ist **nicht Null**!

Vergleich: Elektrostatik vs. Induktion

Elektrostatik (statische Ladungen):

Wirbelfreiheit des elektrischen Felds:

$$\oint \vec{E}_{\text{stat}} \cdot d\vec{s} = 0$$

Das elektrostatische Feld ist konservativ → es existiert ein Potential φ

Elektromagnetische Induktion (zeitlich veränderliches Magnetfeld):

Das induzierte elektrische Feld ist **nicht wirbelfrei**:

$$\oint \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Dies ist das **Faraday'sche Induktionsgesetz**

Die fundamentalen Integralgleichungen der Elektrodynamik

Größe	Elektro-/Magnetostatik	Elektrodynamik
Elektrische Flussdichte $\vec{D}$	$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$	$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$
	Gauß'sches Gesetz	Gauß'sches Gesetz
Elektrische Feldstärke $\vec{E}$	$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$
	Wirbelfreiheit	**Induktionsgesetz**

Größe	**Elektro-/Magnetostatik**	**Elektrodynamik**
Magnetische Flussdichte $\vec{B}$	$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
	Keine magn. Monopole	Keine magn. Monopole
Magnetische Feldstärke $\vec{H}$	$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$	(noch nicht behandelt)
	Durchflutungsgesetz	

Fazit: Zeitlich veränderliche Felder koppeln elektrische und magnetische Phänomene!

Beispiel: Bewegte Leiterschleife im Magnetfeld

Situation: Rechteckige Leiterschleife (Breite b, Höhe h) bewegt sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch homogenes Magnetfeld $\vec{B}$

Induktionsmechanismus:

- Beim Eintreten: zunehmender magnetischer Fluss durch die Schleife
- Vollständig im Feld: konstanter Fluss → keine Induktion
- Beim Austreten: abnehmender Fluss durch die Schleife

Selbstinduktion

Wiederholung: Elektromagnetische Induktion

Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Magnetischer Fluss $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ durch eine Leiterschleife mit N Windungen (Spule)

Zwei Mechanismen der Induktion:

1. **Bewegungsinduktion:** Leiter bewegt sich relativ zum Magnetfeld
   - $U_{\text{ind}} = -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell} = -B \cdot \frac{dA}{dt}$
2. **Ruheinduktion:** Magnetfeld ändert sich bei ruhendem Leiter
   - $U_{\text{ind}} = -A \cdot \frac{dB}{dt}$

Lenz'sche Regel: Die induzierte Spannung wirkt ihrer Ursache entgegen (Energieerhaltung)

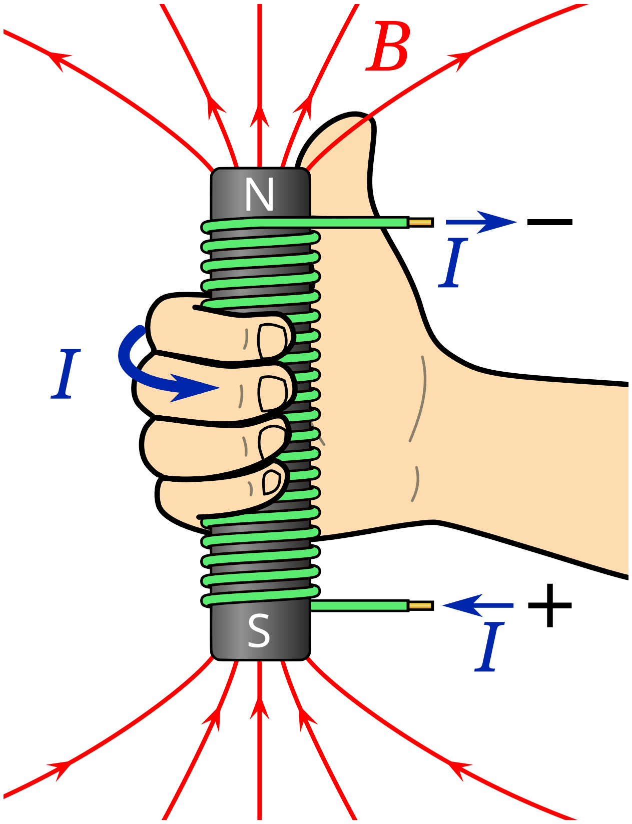
Von der Induktion zur Selbstinduktion

Bisher: Externes Magnetfeld induziert Spannung: $U_{\text{ind}} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$

Jetzt: Stromfluss durch Spule → eigenes Magnetfeld $\Phi \propto I$

Bei Stromänderung ändert sich auch Φ → Induktion **in derselben Spule**!

Selbstinduktion: Die Spule induziert eine Spannung in sich selbst



Herleitung der Selbstinduktivität

Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises:

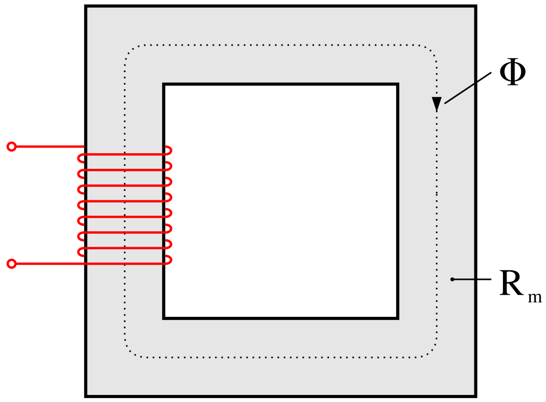
$$\Phi = \frac{\Theta}{R_m} = \frac{I \cdot N}{\frac{\ell_E}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}} = I \cdot N \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{\ell_E}$$

Mit $U_{\text{ind}} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$ folgt:

$$U_{\text{ind}} = -N \cdot \frac{d}{dt} \left(I \cdot N \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{\ell_E} \right)$$

$$= -N^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{\ell_E} \cdot \frac{dI}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Proportionalitätskonstante L: **Induktivität** (Selbstinduktivität)



Vorzeichen: Klemmenspannung vs. induzierte Spannung

Wichtige Unterscheidung:

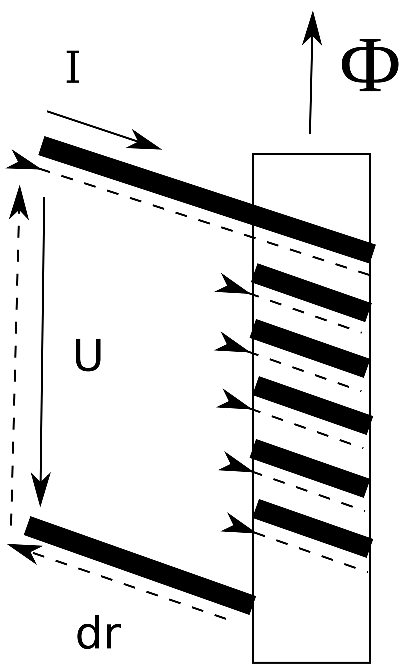
- **Induzierte Spannung** U_{ind}: Umlaufintegral des elektrischen Wirbelfelds

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- **Klemmenspannung** U: Messbare Spannung zwischen den Anschlüssen

Das Ringintegral wird entgegen der Pfeilrichtung der Klemmenspannung durchlaufen → **Vorzeichenwechsel!**

Vorzeichenkonvention: $U = -U_{\text{ind}} = +L \cdot \frac{dI}{dt}$



Induktivität (*inductance*) einer Spule

$$L = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{\ell_E}$$

Einheit: $[L] = [\Lambda] = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \text{H}$ (Henry)

Zusammenhang zwischen Strom und induzierter Spannung:

$$U = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Induktivität bei ferromagnetischen Materialien

$$L = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{\ell_E}$$

- μ_r ist abhängig von $I \rightarrow L$ ist nicht konstant
- Effekt wird reduziert durch Spule mit **Luftspalt**

$$L = N^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot A}{\frac{\ell_E}{\mu_r} + \delta} \approx N^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot A}{\delta}$$

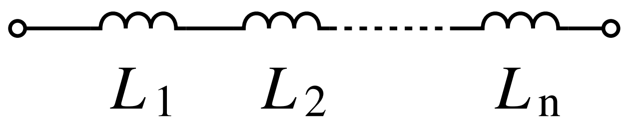
$\rightarrow \mu_r$ hat kaum einen Einfluss auf L bei kleinem Luftspalt δ

Reihenschaltung von Induktivitäten

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n = \sum_i L_i$$

Die induzierten Spannungen addieren sich, der Strom ist überall gleich

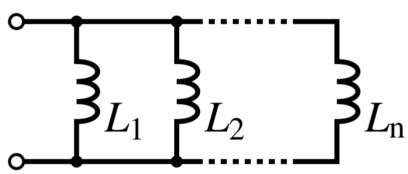
Intuition: Spulen verhalten sich wie eine einzige große Spule



Parallelschaltung von Induktivitäten

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} = \sum_i \frac{1}{L_i}$$

Die Spannung ist überall gleich, die Ströme teilen sich auf



Herleitung: Parallelschaltung von Induktivitäten

$$U_{\text{ges}} = L_{\text{ges}} \cdot \frac{\Delta I_{\text{ges}}}{\Delta t}$$

$$\frac{U_{\text{ges}}}{L_{\text{ges}}} = \frac{\Delta(I_1 + I_2 + ... + I_n)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + ... + \frac{\Delta I_n}{\Delta t}$$

$$= \frac{U_{\text{ges}}}{L_1} + \frac{U_{\text{ges}}}{L_2} + ... + \frac{U_{\text{ges}}}{L_n}$$

$$= U_{\text{ges}} \cdot \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + ... + \frac{1}{L_n} \right)$$

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + ... + \frac{1}{L_n}$$

Energie des magnetischen Feldes

Energiebilanz einer RL-Schaltung

Maschengleichung:

$$U_0 = U_R + U_L = I \cdot R + L \cdot \frac{dI}{dt}$$

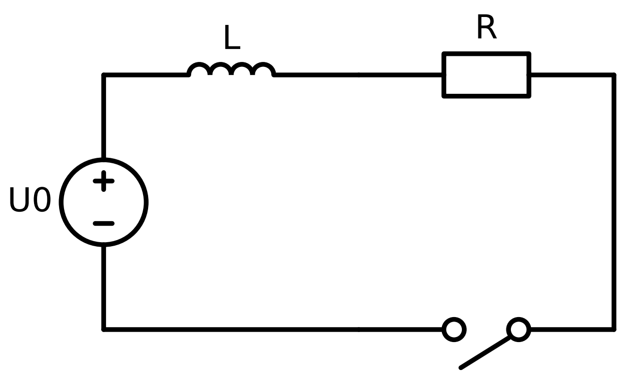
Energie: $dW = U \cdot I \cdot dt$

$$dW = U_0 \cdot I \cdot dt = I^2 \cdot R \cdot dt + L \cdot I \cdot \frac{dI}{dt} \cdot dt$$

Interpretation: Energie wird teils am Widerstand R in Wärme umgesetzt, teils im Magnetfeld der Spule gespeichert

Gespeicherte Energie in einer Induktivität:

$$W_m = \int_0^I L \cdot I \, dI = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$



Alternative Berechnung der magnetischen Energie

Falls die Induktivität L nicht bekannt oder nicht konstant ist:

Gespeicherte Energie des Magnetfeldes:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot H \cdot B \cdot V = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot V$$

Interpretation: Die Energiedichte $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \cdot H \cdot B$ beschreibt die im Magnetfeld gespeicherte Energie pro Volumeneinheit

Anwendung: Bei ferromagnetischen Materialien mit nichtlinearer Kennlinie

Hinweis: Energieerhaltung bei zwei Permanentmagneten

Situation: Zwei Permanentmagnete mit gleicher Magnetisierung M nähern sich an

Bei unendlicher Entfernung:

$$W_{\mathrm{tot},\infty} = 2 \cdot W_m$$

Bei Annäherung auf Abstand d:

$$W_{\mathrm{tot},d} = 2 \cdot W_m + W_{\mathrm{Wechselwirkung}}$$

Zusammenhang zwischen Arbeit und Kraft

$$W_{\mathrm{Wechselwirkung}} = -\int_{\infty}^{d} F \, ds$$

Hinweis: Energieerhaltung bei zwei Permanentmagneten

Die Änderung der Feldenergie kann als Potential interpretiert werden.

Dies gilt aber nur unter folgenden Bedingungen:

- Magnetisierung der Magnete bleibt konstant
- Keine Wirbelströme oder sonstige Verluste
- Keine elektromagnetischen Wellen werden abgestrahlt

Kräfte an Grenzflächen

Herleitung der Maxwell'schen Zugspannung

Situation: Eisenjoch mit Luftspalt der Länge ℓ und Querschnittsfläche A

Energieänderung bei Spaltvergrößerung:

$$dW = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot dV = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot 2 \cdot A \cdot d\ell$$

(Faktor 2: Energie in beiden Luftspalten)

Mit $dW = F' \cdot d\ell$ **folgt:**

$$F' = \frac{dW}{d\ell} = \frac{B^2}{\mu_0} \cdot A$$

Maxwell'sche Zugspannung

Kraft am einzelnen Luftspalt:

$$F = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot A$$

Mechanische Spannung (Kraft pro Fläche):

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0}$$

Anwendungen:

- Hubmagnete (Kräne, Magnetventile)
- Elektromagnetische Relais
- Magnetische Verriegelungen